**Bab 7**

**DIAGONALISASI:**

**Nilai Eigen DAN Vektor Eigen**

Dalam Bab Ini:

* Pendahuluan
* Polinomial Karakteristik
* Diagonalisasi,Nilai Eigen dan Vektor Eigen:Mendiagonalisasi Matriks
* Polinomial Minimal

Pendahuluan

Anggaplah matriks bujursangkar-*n* A telah diketahui. Matriks *A* ini dikatakan *dapat didiagonalisasi* jika terdapat matriks nonsingular *P* sedemikian rupa sehingga

B AP

Adalah diagonal.Bab ini akan membahas diagonalisasi matriks A.Secara spesifik,sebuah algoritma akan diperlukan untuk menentukan matriks P ketika matriks itu ada.

Perhatikan polynomial *f*(t) = +. . .+t + pada medan *K*. Ingat kembali dari Bab 2 bahwa jika *A* adalah seberang matriks bujursangkar, maka kita dapat mendefinisikan

*f*(*A*) = + . . . + *A* + *I*

di mana *I*  adalah matriks identitas. Secara khusus, kita dapat mengatakan bahwa  *A* adalah *akar* dari *f*  (*A*) = 0, yaitu suatu matriks nol.

Contoh7.1 Misalkan *A* = Maka = .Jika

*f* (t) = 2 - 3t + 5 dan *g(t) = - 5t – 2*

maka

*f (A) =2A – 3A + 51 =*  + + =

dan

*g(A)* = - 5A -2*I* = + + =

Shingga *A* adalah matriks nol dari *g* (*t*).

Teorama 7.1 : Misalkan *f* dan *g* adalah polinominalUntuk sebarang matriks bujursangkar *A* dan skalar *k*,

1. (*f* +*g*)(*A*) = *f* (*A*) + *g*(*A*)
2. (*fg*)(*A*) = *f*(*A*) *g* (*A*)
3. (*kf*)(*A*) = *kf* (*A*)
4. *f*(*A*) *g* (*A*) = *g*(*A*) *g* (*A*) *f* (*A*)

Amati bahwa (iv) menjelaskan bahwa sebarang dua polinominal pada *A* bersifat komut ( *commute* ) atau bias saling bertukar tempat.

Polinominal Karakteristik

Misalkan A = [j] adalah matriks bujursangkar-*n*. Matriks *M* = A -t, di mana adalah matriks identitas bujursangkar-*n* dan *t* belum ditentukan (*indeterminate*), dapat diperoleh dengan mengurangkan *t* ke arah bawah diagonal matriks *A*. Negatif dari *M* adalah matriks t – *A*, dan determinannya.

Δ (t) = det (tIn­ – A) = (-1)n det(A - tIn)

yang merupakan polinomial dalam *t* berderajat n, disebut *polinomial karakteristik* dari A.

**Teorema 7.2. : (Cayley - Hamilton)** Setiap matriks A adalah akar dari polinomial karakteristiknya.

Anggaplah A = [aij] adalah matriks segitiga. Maka tI – A adalah matriks segitiga dengan entri-entri diagonal t – aii;oleh karena itu

Δ (t) = det (t – a11) (t – a22) … (t – ann)

Amati bahwa akar-akar dari Δ(t) adalah elemen-elemen diagonal dari A.

**Contoh** 7.2. Misalkan A = polinomial karakteristiknya adalah

Δ (t) = = = (t – 1) (t – 5) – 12 = t2 – 6t – 7

Seperti yang diduga dari Teorema Cayley-Hamilton, A adalah akar dari Δ(t); yaitu

Δ(A) = A2 – 6A – 71 =

Sekarang, anggaplah A dan B adalah dua matriks yang serupa, misalnya B = P-1 AP, di mana P dapat dibalik. Kita dapat menunjukkan bahwa A dan B mempunyai polinomial karakteristik yang sama. Dengan menggunakan tI = P-1tIP, maka kita akan memperoleh

ΔB(t) = det (tI – B) = det (tI – B) = det (tI – P-1AP) = det (P-1tIP – P-1AP) = det [P-1(tI – A) P] = det (P-1t) det (tI – A) det (P)

Dengan menggunakan fakta bahwa determinannya adalah skalar dan bersifat komut, dan bahwa det (P-1) det (P) = 1, maka akhirnya kita memperoleh ΔB(t) = det (tI – A) = ΔA(t).

Dengan demikian, kita telah membuktikan teorema berikut ini.

**Teorema** 7.3: Matriks-matriks yang serupa mempunyai polinomial karakteristik yang sama.

Terdapat rumus sederhana untuk polinomial karakteristik dari matriks-matriks berorde 2 dan 3.

1. Anggaplah A = . Maka

Δ(t) = t2 – (a11 + a22)t + det (A) = t2 – tr(A)t + det(A)

1. Anggaplah A = . Maka

Δ(t) = t3 – tr(A)t2 + (A11 + A22 + A33)t – det (A)

(Di sini A11, A22, A33 masing-masing menotasikan kofaktor-kofaktot dari a11, a22, a33)

**Contoh 7.3.** Tentukan polinomial larakteteristik dari tiap matriks berikut

1. A = b. B = c. C =
2. Kita mempunyai tr(A) = 5 + 10 = 15 dan |A| = 50 – 6 = 44; oleh karena itu Δ(t) = t2 – 15t + 44
3. Kita mempunyai tr(A) = 7 + 2 = 9 dan |A| = 14 + 6 = 20; oleh karena itu Δ(t) = t2 – 9t + 20
4. Kita mempunyai tr(A) = 5 – 4 = 1 dan |A| = -20 + 8 = - 12; oleh karena itu Δ(t) = t2 –t - 12

**Contoh 7.4.** Tentukan polinomial karakteristik dari A =

Kita mempunyai tr(A) = 1 + 3 + 9 = 13. Kofaktor dari elemen-elemen diagonalnya adalah sebagai berikut :

A11 = = 21, A22 = = 7, A33 = = 3

Sehingga A11 + A22 + A33 = 31. Demikian pula, |A| = 27 + 2 + 0 – 6 – 6 – 0 = 17. Berdasarkan hal ini, Δ(t) = t3 – 13t2 + 3lt – 17

**Teorema 7.4:** Misalkan A adalah matriks bujursangkar-n. Maka polinomial karakteristiknya adalah Δ(t) = tn – S1tn-1 + S2tn-2 + … + (-1) nSndi mana Sk adalah jumlah dari minor-minor utama berorde k.

**Diagonalisasi, Nilai Eigen, dan Vektor Eigen**

Misalkan A adalah sebarang matriks bujursangkar-n. Maka A dapat dire­presentasikan oleh (atau serupa dengan) matriks diagonal D = diag(k,, k2, ... I k) jika dan hanya jika terdapat basis S yang terdiri dari vektor-vektor (kolom) u1, u2, …, un sedemikian rupa sehingga

Au1 = k1u1

Au2 = k2u2

………………

Aun = knun

Dalam kasus seperti ini, A dikatakan dapat didiagonalisasi. Lebih jauh lagi, D = P-1AP, di mana P adalah matriks nonsingular yang masing-masing kolomnya adalah vektor-vektor basis u1, u2, …, un.

Misalkan A adalah sebarang matriks bujursangkar. Skalar A disebut nilai eigen dari A jika terdapat vektor (kolom) taknol v sedemikian rupa sehingga Av = λv. Sebarang vektor yang memenuhi hubungan ini disebut vektor eigen dari A yang merupakan bagian dari nilai eigen A.

Perlu dicatat bahwa tiap kelipatan skalar kv dari vektor eigen v yang merupakan bagian dari A adalah jugs vektor eigen seperti itu, karena A(kv) = k(λv) = λ(kv). Himpunan Eλ, yang terdiri dari seluruh vektor eigen seperti itu adalah subruang dari V, yang disebut ruang eigen dari A. (Jika dimE. = 1, maka E. disebut garis eigen dan A disebut faktor Skala.)

Perlu Anda Ketahui

Istilah *nilai karakteristik* dan *vektor karakteristik* (atau *nilai wajar dan vektor wajar)*

Kadang-kadang juga digunakan untuk menggantikan istilah nilai eigen dan vektor eigen.

Teorima 7.5 : Matriks bujursangkar-n A akan serupa dengan matriks diagonal *D* jika dan hanya jika *A* mempunyai n vektor eigen yang bebas linear. Dalam kasus ini, elemen-elemen diagonal dari *D* adalah nilai-nilai eigen yang bersesuaian dan *D* = *AP, dimana P* adalah matriks yang kolom-kolomnya adalah vektor eigen.

Anggaplah matriks  *A* dapat didiagonalisasi seperti diatas, katakanlah *AP* = D dimana *D* adalah matriks diagonal. Maka *A* mempunyai *faktorisasi* diagonal *A* = *PD* yang luar biasa berguna. Dengan menggunakan faktorisasi ini, bentuk aljabar *A* akan disederhanakan menjadi bentuk aljabar matriks diagonal *D*, yang dapat dihitung dengan mudah. Secara spesifik, anggaplah *D* = diag,,…, ). Maka

= (*PD*) = (*P* = *P*diag (

Secara umum, untuk sebarang polinominal *f* (t),

*f* (*A*) = *f* (*PD*(*f*

Lebih jauh lagi, jika entri-entri diagonal dari *D* taknegatif, misalkan

*B = P*diag( ,

maka *B* adalah *akar kuadrat taknegatif* dari *A*; yaitu, = *A*

**Contoh 7.5** Misalkan *A* = dan misalkan dan = .

Maka

*A*= dan *A*= = = 4

Sehingga, dan adalah vector eigen dari *A* yang masing-masing merupakan bagian dari nilai eigen = 1 dan = 4. Amati bahwa dan bebas linear dan oleh karenanya membentuk basis dari **.** Berdasarkan hal itu, *A* dapat didiagonalisasi. Lebih jauh lagi, misalkan *P* adalah matriks yang kolom-kolomnya adalah vektor eigen dan . Dalam hal ini, misalkan

*P* = , sehingga = .

Maka *A* serupa dengan matriks diagonal

*D* = *AP* = =

Seperti telah diduga, elemen-elemen diagonal 1 dan 4 pada *D* adalah nilai-nilai eigen yang masin-masing bersesuaian dengan vektor eigen dan yang merupakan kolom-kolom dari *P*. Secara khusus, *A* mempunyai faktorisasi

*A* = *PD* = =

Berdasarkan hal tersebut,

= =

Lebih jauh lagi, anggaplah *f* (*t*) = - 5+ 3*t* + 6 ; oleh karenanya *f*  (1) = 5 dan *f* (4) = 2. Maka

*f* (*A*) = *Pf* (D) = =

Akhirnya, kita memperoleh sebuah “ akar kuadrat positif ‘’ dari *A* . Secara spesifik, dengan menggunakan = 1 dan = , kita memperoleh matriks.

B

Dimana

Contoh 7.5 di atas menyatakan keunggulan dari representasi (faktorisasi) diagonal suatu matriks bujursangkar. Pada teorema berikut ini, kita akan mencantumkan sifat-sifat yang akan membantu kita untuk menentukan representasi seperti ini.

Teorema 7.6: misalkan A adalah matriks bujursangkar. Maka pernyataan-pernyataan berikut ini adalah ekuivalen.

1. Skalar
2. Matriks
3. Skalar adalah akar dari polinominal karakteristik

Ruang eigen dari nilai eigen adalh ruang solusi dari system homogeny MX=0, dimana M=A-I, dalam hal ini M diperoleh dengan menguangkan

Beberapa matriks tidak mempunyai nilai eigen dan oleh karnanya tidak mempunyai vector eigen. Meskipun demkian, dengan menggunakan Teorema 7.6 dan Teorema Dasar Aljabar (setiap polinominal pada medan kompleks Cmempunyai akar), maka kita akan memperoleh teorema berikut.

Teorema 7.7: misalkan A adalah matriks bujursangkar pada medan kompeks C. matriks A paling sedikit mempunyai satu nilai eigen.

Teorema 7.8: anggaplah adalah vector-vektor eigen taknol dari matriks A yang merupakan bagian dari nilai-nilai eigen yang berbeda. Maka seluruhnya bebas linear.

Teorema 7.9: Anggaplah polinominal karakteristik dari matriks bujursangkar-n A adalh hasilkali dari n factor yang berbeda, katakanlah

Maka A serupa dengan matriks diagonal D = diag(,, …, ).

Jika adalah nilai eigen dari matriks A, maka keragaman aljabar dari didefinisikan sebagai keragaman sebagai sebuah akar dari polinominal karakteristik matriks A, sementara keragaman geometric dari didefenisikan sebagai dimensi dari ruang eigenya, dim.

Teorema 7.10: keragaman geometric nilai eigen dari matriks A tidak akan melamoaui keragaman aljabarnya.

Menghitung Nilai Eigen Dan Vektor Eigen; Mendiagonalisasi Matriks

Babb ini akan menguraikan algoritma untuk menghitung nilai eigen dan vector eigen untuk metrics bujursangkar A yang diketahui, dan untuk menentukan apakah terdapat matriks nonsingular P sedemikian rupa sehingga adalah matriks diagonal.

Algoritma 7.1: (Algoritma DIagnolisasi) inputnya adalah matriks bujursangkar -n A.

Tahap 1. Tentukan poliniminal karakteristik dari A.

Tahap 2. Tentukan akar-akar dari untuk memperoleh nilai-nilai eigen dari A.

Tahap 3. Ulangi (a) dan (b) untuk tiap nilai eigen dari A.

1. Bentuklah matriks M=A-I dengan mengurangkan ke arah menurun diagonal matriks A.
2. Tentukan basis untuk ruang solusi dari sistem homogen MX = 0.

(vector-vektor basis ini adalah vector-vektor eigen bebas linear dari A yang merupakan bagian dari )

Tahap 4. Perhatikan kumpulan S = {} dari seluruh vector eigen yang diperoleh pada tahap 3.

1. Jika mmaka A tidak dapat didiagonalisasi.
2. Jika m = n, maka A dapat didiagonalisasi. Secara spesifik, misalkan P adalah matriks yang nkolom-kolomnya adalh vector-vektor eigen . Maka D = = diag( di mana adalah nilai eigen yang bersesuaian dengan vector eigen .

Contoh 7.6. algoritma yang dapat didiagonalisasi berlaku pada A = .

1. Polinominal karakteristik 𝜟(t) dari A dapat dihitung.kita mempunyai

Tr(A)=4-1=3, |A|=-4-6=10;

Dan oleh karenanya (T)=-3t-10=(t-5)(t+2)

1. Tetapkan (t)=(t-5)(t+2)=0.Akar =5 dan =-2 adalah nilklai eigen dari A.
2. (a) Kita Menentukan vector eigen dari A yang merupakan bagian dari nilai eigen =5 .kurangkan =5 ke arah menurun diagonal matriks A untuk memperoleh matriiks M=vektor eigen yang merupakan bagian dari =5 membentuk solusi dari system homogeny MX=0,yaitu

= atau atau –x+2y=0

Sistem ini hanya mempunyai satu variable bebas.sehingga solusi teknol,misalnya =(2,1),adalah factor eigen yang merntang ruang eigen dari =5.

1. Kita menentukan factor eigen dari A yang merupakan nilai eigen =-2.Kurangkan -2 (atau tambahkan 2) kearah

Menurun diagonal matriks A untuk memperoleh matriks M= dan system homogen

atau 3x+y=0

Sistem ini hanya mempunyai satu solusi bebas.Sehingga solusi taknol,misalnya =(1,3),adalah faktor eigen yang merentang ruang eigen dari =-2.

1. Misalkan *P* adalah matriks yang kolom-kolomnya adalah vector eigen dan .maka

P=,sehingga =

Berdasarkan hal itu, D= adalah matriks diagonal yang entri-entri diagonalnya adalah nilai-nilai eigen yang bersesuaian,yaitu

D=AP= =

**Contoh 7.7.** Perhatikan matriks B=.Kita mempunyai tr(B)=5+3=8, =|*B*|=15+1=16; sehingga ∆(t)=-8t+16=

Berdasarkan hal itu,λ=4 adalah satu-satunya nilai eigen dari *B.*Kurangkan λ=4 ke arah menurun diagonal matriks *B* untuk memperoleh matriks M= dan system homogen atau x-y=0.

Sistem tersebut hanya mempunyai satu solusi bebas;katakanlah x=1,y=1.Sehingga vector-vektor eigen dari *B* hanyalah v=(1,1)

Dan kelipatan-kelipatannya.Berdasrkan hal itu, *B* tidak dapat didiagonalisasikan,karena tidak terdapat sebuah basis yang terdiri dari vector-vektor eigen dari *B.*

**Contoh 7.8.** perhatikan matriks A=.Di sini tr(A)=3-3=0 dan |A| =-9+10=1.Sehingga ∆(t)=+1 adalah polinominal karakteristik dari A.mari kita perhatikan dua kasus berikut ini:

1. A adalah sebuah matriks pada medan real **R**,maka ∆(t) tidak mempunyai akar (real).Dengan demikian A tidak mempunyai nilai eigen dan vector eigen,demikian pula A tidak dapat didiagonalisasi.
2. A adalah sebuah matriks pada sebuah kompleks **C**.Maka ∆(t)=(t-i)(t+i) mempunyai dua akar,yaitu i dan –i.dengan demikian A mempunyai dua nilia eigen yang berbeda I dan –I,dan karenanya A juga mempunyai dua vector eigen yang bebas.Berdasarkan hal itu,terdapat matriks nonsingular *P* pada medan kompleks **C** di mana

AP=.Dengan demikian A dapat didiagonalisasikan (pada **C**).

Terdapat banyak matriks real yang tidak dapat didiagonalisasi.Kenyataannya,beberapa matriks real mungkin tidak mempunyai nilai eigen (real).

Apapun. Meskipun demikian,jika *A* adalah matriks simetris real, maka masalah-masalah ini tidak akan ada. Berdasarkan hal itu, kita mempunyai teorema-teorema berikut.

**Teorema 7.11**: Misalnya *A* adalah matriks simetris real. Maka tiap akar dari polynomial karakteristiknya adalah real.

**Teorema 7.12**: Misalkan *A* adalah matriks simetris real. Anggaplah *u dan v* adalah vectoreigen dari A yang merupakan bagian dari nilai eigen dan yang berbeda. Maka *u* dan *v* adalah orthogonal,yaitu <*u,v*>= 0.

Kedua teorema di atas menghasilkan teorema dasar berikut.

**Teorema 7.13**:Misalkan *A* adalah matriks simetris real. Maka terdapat matriks orthogonal *P* sedemikian rupa sehingga *D=AP* adalah matriks diagonal.

Matriks orthogonal *P* deperoleh dengan menormalisasi basis dari vector-vektor eigen orthogonal dari *A* sebagaimana diilustrasikan di bawah ini. Dalam kasus seperti ini,kita mengatakan bahwa *A* “dapat didiagonalisasi secara orthogonal”.

**Contoh 7.9.** Misalkan *A*= adalah matriks simetris real. Tentukan matriks orthogonal *P* sedemikian rupa sehingga *AP* adalah matriks diagonal.

1. Pertama-tama kita menentukan polynomial karakteristik ∆(t) dari A. Kita mempunyai tr(A) = 2 + 5 = 7, |A| = 10-4 =6; sehingga ∆(t) = - 7t + 6 = (t - 6)(t – 1)

Berdasarkan hal itu, = 6 dan = 1 adalah nilai-nilai eigen dari *A.* Dengan mengurangkan = 6 ke arah menurun diagonal matriks *A* akan menghasilkan matriks *M* = dan system homogen atau 2x + y =0. Solusi taknolnya adalah = (1,-2).

1. Dengan mengurangkan =1 ke arah menrun diagonal matriks *A* akan menghasilkan matriks *M* = dan system homogeny x – 2y = 0. Solusinya taknolnya adalah = (2,1).

Seperti telah di duga dari Teorema 7.12, dan adalah ortoganl. Normalisasi dan menghasilkan vector-vektor ortonormal

= (1/, -2/) dan = (2/, 1/)

Akhirnya, misalkan *P* adalah matriks yang kolom-kolmnya masing-masing adalah dan .

Maka *P =* dan *AP* = . Seperti telah di duga,entri-entri diagonal dari *AP* adalah nilai-nilai eigen yang bersesuain dengan kolom-kolom dari *P*.

Prosedur pada contoh 7.9 din atas dirumuskan pada algoritma berikut, yang menentukan matriks orthogonal *P* sedemikian rupa sehingga *AP* adalah matriks diagonal.

**Algoritma 7.2**: (Algoritma Diagonalisasi Ortogonal) Inputnya adalah matriks simetrik real A.

Tahap 1. Tentukan polinominal karakteristik ∆(*t*) dari *A*.

Tahap 2. Tentukan nilai-nilai eigen dari A, yang merupakan akar-akar dari ∆(*t*).

Tahap 3. Untuk tiap nilai eigen pada Tahap 2, tentukan basis orthogonal dari ruang eigennya.

Tahap 4. Normalisasikan seluruh vector eigen pada tahap 3, yang kemudian akan membentuk basis ortonormal dari R”.

Tahap 5. Tetapkan P sebagai matriks yang kolom-kolomnya adalah vector-vektor eigen yang di normalisasikan pada Tahap 4.

Polinominal Minimal

Misalkan *A* adalah sembarang matriks bujur sangkar. Misalkan *J(A)* menotasikan kumpulan seluruh polinominal *f*(*t)* di mana *A* adalah akarnya, yaitu di mana *f*(*A) =0.* Himpunana kosong, karena Teorema Cayley.

Hamilton 7.2 menjelaskan bahwa polynomial karakteristik (t) dari A adalah bagian dari J(A). misalakan m(t) menotasikan polinomial monik berderajat terendah pada J(A). (Polinomial m(t) sperti ini ada unik.) Kita menyebut m(t) dengan polinomial minimal dari matriks A.  
  
Catat!   
Polinomial f(t) ≠ 0 disebut monik jika koefisien utamanya sama dengan satu  
  
**Teorema 7.14**: Polinomial minimal m(t) dari matriks A membagi setiap polynomial yang mempunyai matriks A sebagai sebuah nol. Secara khusus, m(t) membagi polynomial karakteristik Δ(t) dari A.  
  
Ternyata masih terdapat hubungan yang lebih kuat antara m(t) dan Δ(t).   
  
**Teorema 7.15**: Polinomial karakteristik Δ(t) dan polinomial minimal m(t) dari matriks A mempunyai faktor-faktor tidak dapat direduksi (disederhanakan) yang sama.  
 Teorema ini tidak menyatakan bahwa m(t) = Δ(t), tetapi bahwa factor tidak dapat direduksi manapun dari salah satunya harus membagi yang lainnya. Secara spefisik karena semuah faktor linear tidak dapat direduksi, maka m(t) ada Δ(t) mempunyai faktor linear yang sama. Sehingga, keduanya mempunyai akar yang sama pula. Dengan demikian kita mempunyai teorema berikut ini.  
**Teorema 7.16:** skala **λ** adalah nilai eigen dari matriks A jika dan hanya jika **λ** adalah akar dari polynomial minimal dari A.  
**Contoh 7.10.** tentukan polynomial minmal m(t) dari A =   
  
  
Pertama-tama, tentukan polynomial karakteristik Δ(t) dari A. Kita mempunyai tr(A) = 5, + + = 2 – 3 + 8 = 7 dan = 3. Oleh karenanya,   
Δ(t) = – 5 + 7t – 3 = (t – 1(t – 3).  
Polinomial minimal m(t) harus membagi Δ(t). Demikian pula, tiap faktor tidak dapat direduksi dari Δ(t), yaitu t – 1 dan t – 3 juga harus merupakan faktor dari m(t) tepatnya merupakan salah satu diantara yang berikut ini:   
ƒ(t) = (t – 3)(t – 1) atau g(t) = (t – 3 )(t – 1 .  
Kita mengetahui berdasarkan Teorema Cayley-Hamilton, bahwa g(A) = Δ(A)= 0. Oleh karena itu, kita hanya perlu menguji ƒ(t). kita mempunyai  
ƒ(A) = (A – 1 )(A – 31) = =   
Sehingga ƒ(t) = m(t) = (t – 1)(t – 3) = – 4t + 3 adalah polinomial minmal dari A.  
**Contoh 7.11.**   
(a) perhatikan dua matriks bujursangkar-r berikut, dimna a ≠ 0:  
J(λ,r) = dan A   
Matriks pertama, disebut Blok Jordan, mempunyai λ pada diagonalnya 1 pada *superdiagonal*-nya  
 (terdiri dari entri-entri di atas entri diagonal), dan 0 ditempat lainnya. Matriks kedua A mempunyai λ pada diagonalnya, a pada *superdiagonal*-nya, dan 0 di tempatlainya.  
[sehinga A adalah generalisasi dari J(λ,r.) Kita dapat menunjkkan bahwa ]  
ƒ(t) = (t – λ adalah polinoial karakteristik dan polynomial minimal dari J(λ,r) maupundariA.

(*b) Perhatikan sebarang polinominal monik*

*f* (t) = + + … + +

Misalkan C (*f*) adalah matriks bujursangkar –n dengan 1 terletak pada *subdiagonal-*nya (terdiri dari entri-entri di bawah entri diagonal), nilai neagatif koefisien-koefisien nya pada kolom terakhir, dan 0 di tempat lainnya, sebagaimana berikut:

C (*f*) =

Maka C (*f*) disebut *matriks pendamping*  dari polynomial *f(*t), Di samping itu, polynomial *m(*t) dan polynomial karakteristik (t) dari matriks pendamping C(*f*) keduanya sama dengan polynomial asal *f*(t)

Anggaplah *M* adalah matriks segitiga blok,katakanlah

*M =* di mana dan adalah matriks bujursangkar.Maka *Tl-M*

Juga adalah matriks segitiga blok,dengan blok diagonal *tL-* dan *tL-*

= =

Dalam hal ini,polynomial karakteristik dari *M*  adalah hasilkali dari polynomial-polinomial karakteristik dari blok-blok diagonal dengan  Melalui induksi,kita akan memperoleh hasil yang berguna berikut ini.

**TEOREMA 7.17:** Anggaplah M sebagai matriks segitiga blok dengan blok-blok diagonal . Maka polynomial karakteristik dari M adalah hasilkali dari polynomial-polinomial karakteristik dari blok-blok diagonal ; yaitu, (*t) =* (*t*)(*t*)…(*t*)

**Contoh 7.12.** Perhatikan matriks M = . Maka M adalah

Matriks sigitiga blok dengan blok-blok diagonal

*A* = dan *B* =

Tr (*A)* = 9 + 3 =12. det(*A*) = 27 + 8 = 35, sehingga =

Tr (*B)* = 3 + 8 =11. det(*B*) = 24 + 6 = 30, sehingga =

Berdasarkan hasil di atas maka polynomial karakteristik dari M adalah hasil kali dari

(*t*) = (*t*) (*t*) = (t – 6) (t-7)

**TEOREMA 7.18:** Maka anggaplah *M* sebagai matriks diagonal blok dengan blok-blok diagonal . Maka ,polynomial minimal dari *M* sama dengan Klipatan Persekutuan Terkecil (KPK) dari polynomial –polinomial minimal dari blok-blok diagonal

Perlu ditekan bahwa teorema ini berlaku pada matriks diagonal blok,sementara analogi TEOREMA 7.17 tentang polynomial karakteristik berlaku pada matriks segitiga blok

**CONTOH 7.13.** Tentukan polynomial karakteristik (t) dan polynomial *m*(t) dari matriks diagonal blok

M = = diag (

=, A1=, A3=

Maka (*t*)adalah hasil kali dari polinominal-polinominal karakteristik 1(*t*) 2(*t*),

3(*t*) masing –masing dari A1,A2,A3. Kita dapat menunjukan bahwa

2 ,

Sehingga ,3 (t-7)2

Polinominal minimal *m*1,(t),*m2*(t),*m*3(t) dari masing-masing blok diagonal

*A1,A2,A3,* sama dengan polinominalkarakteristik , yaitu,

2

Tetapi *m*(t) sama dengan kelipatan persekutuan terkecil dari *m*1(t), *m*2(t),

*M*3(t),

Dengan demikian , *m*(t) = (t-2)2(t-7).